La Ley de Peirce y las formas de la negación

Gladys Palau[*] *y Cecilia Durán*[†]

En 1885 Peirce axiomatizó la lógica proposicional con cinco axiomas (*icons*), los cuales en la formalización propuesta por Prior (1958) son.

P1. $\vdash A \to A$	(3.376)
P2. $\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$	(3.337)
P3 $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$	(3.379)
P4. $\vdash f \to A$	(3.381) (EFQ)
P5. $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$	(3.384) (LP)

Es precisamente su quinto *icon*, el que se conoce en la literatura lógica con el nombre de *Ley de Peirce* (LP) Esta tesis tiene las siguientes propiedades:

(1) Tarski y Bernays en 1920 mostraron que a partir de la ley de Peirce como axioma más los dos axiomas siguientes: $\vdash A \to (B \to A)$ y $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ se obtienen como teoremas todas las tautologías del llamado *Cálculo Implicativo Positivo de Hilbert (H→)* o *Lógica clásica restringida*)[1] Dado que las primeras cuatro tesis son también tesis intuicionistas, LP ha sido considerada en la literatura específicamente lógica como característica de la implicación material clásica y, por ello, de la lógica clásica.

(2) Mediante una matriz específica para el condicional[2] se muestra que efectivamente LP es independiente de los dos axiomas implicativos de Hilbert, i.e., H1 $\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ y H2, $\vdash A \to (B \to A)$ ya que, tal como la prueba de independencia lo exige, hace que los axiomas de Hilbert preservan el 0 y LP no De ello semánticamente se sigue que LP no es derivable del fragmento implicativo positivo conformado solamente por los dos axiomas de Hilbert o cualquier base equivalente.

(3) En concordancia con el resultado (2) Curry (1963, 5, Sec. C, Ej. 2) muestra que es imposible demostrar LP en su sistema de secuentes implicativo absoluto LA, pero que sí es posible su demostración en LC, i.e., el cálculo de secuentes implicativo clásico.

Estas características parecerían mostrar que la demostración de LP no guarda ninguna relación con la conectiva de la negación y han contribuido a pensar que LP pertenece al cálculo positivo clásico Sin embargo, cuando se ha tratado de demostrar LP como teorema, han aparecido las poco divulgadas perplejidades en torno a esta ley y su relación con la conectiva de la negación, a saber:

(i) Pese a que LP no contiene la conectiva de la negación, en el cálculo de Deducción Natural del mismo Gentzen, la demostración más común de LP requiere de la constante $\perp$(o *f*) (*lo absurdo* o *lo falso*) y dos leyes de la negación: EFQ (*Ex Falsum Quodlibet*), característica

[*] UBA-UNLP
[†] UNLP

de la negación intuicionista y DN (*Doble Negación*), propia de la negación clásica (la prueba, por su sencillez, se deja para el lector)

(ii) Sin embargo, consecuentemente con (4) se ha mostrado mediante matrices particulares, que LP es independiente de la doble negación intuicionista $A \to \neg\neg A$ (DNJ), porque mientras $\neg\neg A \to A$ y LP preservan el 0, $A \to \neg\neg A$ no lo preserva.

(iii) Asimismo, A. Prior (1958) mostró también mediante matrices especiales que LP es independiente de los axiomas P2-P4 de Peirce y, por ello de EFQ, de donde se seguiría que LP puede tener una prueba sin usar tal regla. En efecto, tal demostración existe pero en ella debe usarse la doble negación clásica $\neg\neg A \to A$. (La prueba es en Deducción Natural y se deja para el lector)

(iv) H. Curry (1963) construye un sistema LA al estilo de la lógica de secuentes de Gentzen que consta de las reglas estructurales y de las operatorias para el condicional, disyunción y conjunción. Curry muestra. (1) mediante un razonamiento ad impossible que en LA, (equivalente lógico del retículo implicativo absoluto) es imposible demostrar LP[3] (corolario 7.2) y (2) que si se agrega LP como axioma a LA se obtiene el sistema LC (equivalente lógico del retículo implicativo clásico de Skolem). Posteriormente, agrega a LA la constante primitiva f (o $\bot$) (*falsum*) y la definición de la negación en términos de la constante f; a saber:

$$\text{Def.}_\neg \qquad \neg A =_{df} A \to f$$

Según sean las reglas características para la negación, Curry define cinco clases de negación, a saber: negación minimal (LM), negación intuicionista (LJ), negación estricta, refutabilidad clásica (LE) y negación clásica (LK). En particular, LE consiste en agregar a LM precisamente la Ley de Peirce.

(v) A partir de LM se puede construir LJ en un cálculo de secuentes singulares que posea la constante f (o $\bot$), la misma definición de la negación en términos de la constante f y agregando *Ex Falsum Quolibidet* (EFQ), o sea:

$$\frac{X \vdash f}{X \vdash A}$$

Sin embargo, tampoco en él es posible demostrar LP, porque su demostración, aún usando EFQ tendría más de una fórmula en el postsecuente y no sería intuicionista. Por ello y a los efectos de demostrar LP se hace necesario agregar una regla equivalente a la negación clásica (DN), la cual, formulada con la constante f es:

$$\frac{(A \to f) \vdash A}{\vdash A} \quad \text{DN}$$

Esto hace posible ahora demostrar LP aún en secuentes singulares.

Demostración:

$f \vdash f$	Ax
$A \vdash A \qquad f \vdash B$	Ax, *plus* EFQ
$A \to f, A \vdash B$	$\to\vdash$
$A \to f \vdash A \to B \qquad A \vdash A$	$\vdash\to$, *plus* Ax
$A \to f, (A \to B) \to A \vdash A$	$\to\vdash$

$(A\to B)\to A \vdash A$	DN
$\vdash ((A\to B)\to A)\to A$	$\vdash\to$

(vi) Más aún, también es posible mostrar este resultado en el cálculo de Curry demostrando que la doble negación se sigue y LP formulada como regla, i.e.:

$$\frac{A\to B \vdash A}{\vdash A,} \quad \text{LPr}$$

Demostración.

$$\frac{A\to f \vdash A \quad \text{hip}}{\vdash A \quad \text{LPr}}$$

(vii) En las presentaciones axiomáticas de la lógica clásica (e g. Church, 1956) se demuestra LP como teorema pero incluyendo en su vocabulario primitivo también la constante *falsum* (f) y la definición de la negación en términos de tal constante, ya introducida en (iv), a saber: $\neg A =_{df} A\to f$

En particular, en la presentación de Church, la tesis característica de la constante f es:

T1 $\vdash ((A\to f)\to f)\to A$

El cual afirma que si una proposición falsa implica la falsedad, entonces es verdadera, lo cual intuitivamente equivale a la parte clásica de la Doble Negación $\neg\neg A\to A$. Asimismo, este axioma será luego usado para la demostración de otras tesis referentes a la negación, las que a su vez permitirán deducir LP como teorema (Church, 19... p).

(viii) G. Restall (2000,p 179, 189) demuestra que LP no es demostrable en ningún cálculo que no contenga la negación clásica booleana, mostrando que no se satisface en el llamado reticulado de Heyting pero sí en las álgebras booleanas, consistentemente con los resultados mostrados anteriormente.

(ix) Finalmente, la perplejidad mayor surge cuando en la Lógica de Secuentes de Gentzen, sin hacer uso de la negación, se demuestra que LP no es tesis de la lógica intuicionista (J), debido a que su demostración, necesita de dos fórmulas en el postsecuente, o sea que pertenece a la lógica clásica (K)

Demostración.

$A \vdash A$		Ax.	(1)
$A \vdash B, A$		$\vdash$At	(2)
$\vdash A\to B, A$		$\vdash\to$	(3)
$\vdash A, A\to B$	$A \vdash A$	$\vdash$P *plus* Ax	(4)
$(A\to B)\to A \vdash A , A$		$\to\vdash$	(5)
$(A\to B)\to A \vdash A$		$\vdash$C	(6)
$\vdash ((A\to B)\to A) \to A$		$\vdash\to$	(7)

Sin embargo, aunque no aparezca la negación en forma explícita, la falsedad está involucrada en el segundo paso A⊢B, A obtenido por Atenuación en el postsecuente. En efecto, dado que en todo secuente el postsecuente es una disyunción de fórmulas, es posible atenuar con una fórmula cualquiera B, que bien puede ser falsa y, en particular, puede ser *f*. Luego, si leemos $A\rightarrow f$ como A es falsa y definimos $\neg A$ como $A\rightarrow f$, se constata cómo se ha llegado a obtener LP Más aún, si en la demostración solamente se reemplaza $A\rightarrow f$ por $\neg A$, se obtiene directamente la ley de Peirce débil o *Consequentia Mirabilis*

Pasemos ahora a examinar las razones de Peirce para fundamentar el carácter axiomático de LP, cuya dificultad él mismo reconoce y en donde veremos cómo sus argumentos explicitan el uso de la doble negación clásica. y que parecen subacer enla demostración de Gentzen.

En los *Collected Papers,* Peirce, más precisamente en 3.384, luego de introducir el quinto ícono i.e., LP $\vdash((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow B$, sostiene lo siguiente[4]:

Su carácter axiomático es dificultoso. *El que sea verdadero se vuelve evidente por lo siguiente. Sólo puede ser falso si el consecuente A es falso mientras que su antecedente ((A → B) → A) es verdadero. Si esto es cierto, o bien su consecuente, A , es verdadero, cuando la totalidad de la fórmula sería verdadera, o su antecedente A → B es falso. Pero en el último caso el antecedente de A → B debe ser verdadero.*

De la apretada argumentación de Peirce se sigue que, si tenemos en cuenta las valuaciones posibles de las fórmulas que sustituirían *A* y *B*, concluimos que según la definición clásica de las conectivas, la ley de Peirce es una genuina ley en el sentido de que no admite ninguna sustitución tal que se obtenga una valuación que la haga falsa, en concordancia con el resultado de Restall. Es decir, Peirce tiene en cuenta las posibles valuaciones de la implicación material al analizar la verdad de su quinto icono.

Llama también la atención que en un comunicado tan breve como el mencionado, en el que Peirce sólo desarrolla cuestiones esenciales referidas a sus cinco íconos, relacione LP con el Tercero Excluido y afirme.

A partir de la fórmula que acabamos de dar, en un paso obtenemos $((A\rightarrow B)\rightarrow\alpha)\rightarrow A$,
en la que α es usada en un sentido tal que $(A\rightarrow B)\rightarrow\alpha$ significa que a partir de $A\rightarrow B$
se sigue toda proposición. Entendida así, la fórmula expresa el principio del tercero excluido, de que a partir de la falsedad de la negación de A se sigue la verdad de A.

A los efectos de desentrañar la argumentación de Peirce, daremos primero la caracterización de la negación expuesta por el mismo Peirce en la obra citada.

Ahora tenemos que ampliar la notación para introducir la negación. Ya hemos visto que si a es verdadera, podemos escribir $x \rightarrow a$, sea lo que fuere x. Sea b tal que podamos escribir $b \rightarrow x$ cualquiera sea x. Entonces b es falsa.

Expresadas en terminología actual, pero respetando la simbolización de Peirce respecto de la idea de "toda (o cualquier) proposición" con la letra α ellas dicen.

Def. P1. una proposición A es verdadera sii toda proposición la implica. O sea:

A es Verdadera sii $\alpha\rightarrow A$

Def. P2: Una proposición es falsa si ella implica toda proposición. O sea:

A es falsa sii $A \to \alpha$.

Con estas definiciones, la prueba transcripta de Peirce de su quinto ícono podría ser esquematizada de la siguiente manera:

1) $((A\to B)\to A)\to A$ (LP) sólo podría ser Falsa sii $((A\to B)\to A) = V$ y $A = F$
2) $(A\to B)\to A) = V$ sii $(A\to B)= F$ o $A = V$
3) Si $(A\to B)= F$, necesariamente $A = V$ (en contra de 1))[5]

   Para expresar que $(A\to B)= F$, se debe entonces reemplazar en LP la segunda aparición de A por α obteniéndose:
4) $((A\to B)\to \alpha)\to A$

   Ahora bien, nosotros sostenemos que el mismo argumento empleado por Peirce para el reemplazo de A por α puede iterarse para el primer condicional de LP, i.e., $A \to B$, ya que B es una fórmula cualquiera obteniéndose:
5) $((A\to\alpha)\to\alpha)\to A$

   Ahora bien, si en 5) reemplazamos α por la constante f obtenemos
6) $((A \to f) \to f) \to A$, fórmula que constituye el T1 de Church.

Puede así observarse que, a pesar de haber argumentado sobre la base del Tercero Excluido, Peirce llega la Doble negación clásica:

$$\neg\neg A \to A$$

ya que esta es el resultado de aplicar la definición de la negación ($A \to f =_{df} \neg A$) a (6) 2 veces, cuya secuencia sería:

(6) $((A \to f) \to f) \to A$

(6') $(\neg A \to f) \to A$ de (6) por df$\neg$

(7) $\neg\neg A \to A$ de (6') por df$\neg$

Y mostrarse así que LP equivale al Principio de Doble Negación, tal como se mostró en los puntos (v) y (vi).

De este modo hemos mostrado que LP contiene 2 negaciones. El resultado de esta iteración de negaciones nos dio el principio de Doble Negación aunque en verdad, en el escrito analizado, Peirce alude al Principio del Tercero Excluido formulado a modo de Doble Negación:

Entendida así, la fórmula expresa el principio del tercero excluido, de que a partir de la falsedad de la negación de A se sigue la verdad de A

Si nuestra interpretación del texto de Peirce es correcta podemos afirmar que Peirce formuló LP teniendo en mente la negación, a pesar de que la fórmula misma es opaca respecto de ella. Es más, si solamente consideramos que la subfórmula B es una fórmula cualquiera, es decir *toda* fórmula, obtenemos.

(8) $((A \to f) \to A) \to A$

Y si a (8) le aplicamos Df$\neg$, obtenemos la tesis conocida como *consequentia mirabilis*, mencionada en (vi), a saber:

(9) $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$

Cuya derivación requiere de DN pero no de EFQ[6].

Las fórmulas (5), (6), (8) y (9) resultan de transformaciones de LP siguiendo la indicación de Peirce que permite obtener LPα y de la definición de negación aceptada por Peirce Todas ellas son válidas en la Lógica Clásica Dado que todas estas negaciones sólo son visibles a resultas de las manipulaciones mencionadas por Peirce hemos decidido llamarlas "troyanas" para resaltar su carácter oculto en LP.

El problema central al que ahora hemos llegado es de carácter filosófico y podemos reducirlo a la siguiente pregunta: ¿a qué noción de consecuencia lógica pertenece LP? Es sabido que la caracterización de esta noción se hace desde del metalenguaje de forma tal que la noción de consecuencia de cada ley lógica responde al conjunto de reglas que son necesarias para su demostración. Dado que, como lo hemos visto, Lp es solidaria de los principios clásicos, su teoremicidad o carácter axiomático depende del conjunto de las leyes clásicas. Es sabido que si no se quiere obtener toda la lógica clásica se la puede postular como axioma, pero, sin afirmarlo explícitamente, LP nos introduce "troyanamente" toda la lógica clásica.

Notas

[1] Es interesante destacar que Lukasiewicz, según lo cita Prior (1962), mostró que el cálculo implicativo puro podía ser derivado de una fórmula que tuviera al menos 13 símbolos, tal como la siguiente de 13 símbolos: $\vdash((p\rightarrow q)\rightarrow r)\rightarrow((r\rightarrow p)\rightarrow(s\rightarrow p))$ y tomando el silogismo hipotético, LP y la carga de premisas como reglas En efecto de los dos primeros condicionales se sigue por SH $(p\rightarrow q)\rightarrow p$, luego por LP se sigue p y luego, por Carga de premisas se sigue $s\rightarrow p$

[3] Curry aclara que el cálculo LA y LC son equivalentes al LJ y LK de Gentzen, pero sin la negación

[4] En las citas de Peirce hemos sustituido la notación original por la empleada en este trabajo.

[5] Debe observarse que en la argumentación de Peirce se basa en la equivalencia entre el condicional $A\rightarrow B$ y su formulación en términos de $\neg A \vee B$, la cual presupone negación clásica.

[6] Es decir no expresa la negación clásica sino la refutabilidad clásica.

Bibliografía

Church, A.,(1956), *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton University Press, New Jersey

Curry,H. (1963) *Foundations of Mathematical Logic*, Dover, Pub New York

Peirce,D *Collected Papers*, (1885) CD

Prior, A (1958), "Peirce's Axioms for Propositional Calculus", en *The Journal of Symbolic Logic*, 23 ,2,,June,pp 136-137

Prior, A. (1962), *Formal Logic*, Oxford, At the Clarendon Press

Restall, G (2000), *An Introduction to Substructural Logics*, Routledge